

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Bakalářská práce

**Metoda hraničních prvků
pro řešení Poissonovy rovnice ve 3D**

**Boundary element method
for the Poisson equation in 3D**

Autor:
Lukáš Sideradis

Vedoucí:
Ing. Jan Zapletal, Ph.D.

2018

Zadání bakalářské práce

Student: **Lukáš Sideradis**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: **Metoda hraničních prvků pro řešení Poissonovy rovnice ve 3D**
Boundary element method for the Poisson equation in 3D

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Metoda hraničních integrálních rovnic (BIE - Boundary Integral Equations) a její diskrétní podoba, metoda hraničních prvků (BEM - Boundary Element Method), je efektivním přístupem pro řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic. Cílem bakalářské práce je nastudování metod BIE a BEM pro Poissonovu rovnici modelující šíření tepla ve 3D a efektivní implementace BEM pro její numerické řešení. Práce bude obsahovat

1. popis BIE a BEM pro Poissonovu rovnici ve 3D,
2. možnosti realizace Newtonova potenciálu pomocí hraničních operátorů (zejména při znalosti partikulárního řešení),
3. efektivní implementaci v C++ knihovně BEM4I (bude vycházet z již existujícího kódu [4]),
4. numerické experimenty, vizualizace řešení.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Rjasanow, S.; Steinbach, O. The Fast Solution of Boundary Integral Equations. Springer, 2007.
- [2] Steinbach, O. Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements. Springer, 2008.
- [3] Zapletal, J. The Boundary Element Method for the Helmholtz Equation in 3D. VŠB-TU Ostrava, 2011.
- [4] BEM4I library, dostupné z bem4i.it4i.cz.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

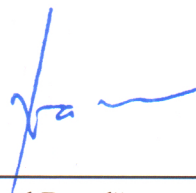
Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Jan Zapletal, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2017

Datum odevzdání: 30.04.2018



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární
prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě dne 30. dubna 2018

.....

Rád bych poděkoval Ing. Janu Zapletalovi, Ph.D. za jeho trpělivost a cenné připomínky, které mi během vedení práce poskytl. Zároveň bych chtěl poděkovat IT4Innovations za podporu poskytnutou během realizace této práce.

Abstrakt

Tato práce se zabývá řešením Poissonovy rovnice ve 3D pomocí metody hraničních prvků. Postup je založen na přeformulování okrajového problému pomocí hraničních integrálních rovnic, které lze následně řešit pomocí několika různých přístupů. Získané výsledky jsou porovnány s přesným analytickým řešením.

Klíčová slova: metoda hraničních prvků, Poissonova rovnice, věta o třech potenciálech, hraniční integrální rovnice

Abstract

This work describes the solution of Poisson's equation in 3D using the boundary element method (BEM). The method is based on reformulation of the boundary problem using boundary integral equations (BIE), which can subsequently be solved using several different approaches. Obtained results are then compared to an exact analytical solution.

Keywords: boundary element method, the Poisson equation, the representation formula, boundary integral equations

Obsah

Seznam obrázků	i
Seznam tabulek	ii
1 Úvod	1
2 Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici ve 3D	2
2.1 Zavedení okrajové úlohy, fundamentální řešení	2
2.2 Potenciály v \mathbb{R}^3 a jejich vlastnosti	3
2.3 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici	5
3 Realizace Newtonova potenciálu pomocí hraničních operátorů	6
3.1 Užití partikulárního řešení v objemové formulaci	6
3.2 Užití partikulárního řešení v hraniční formulaci	7
3.3 Úloha s harmonickou pravou stranou	8
4 Diskretizace a metoda hraničních prvků	10
4.1 Diskretizace užití partikulárního řešení v objemové formulaci	12
4.2 Diskretizace užití partikulárního řešení v hraniční formulaci	14
4.3 Diskretizace úlohy s harmonickou pravou stranou	15
4.4 Numerická integrace	17
5 Numerické experimenty	19
5.1 Užití partikulárního řešení v objemové formulaci	21
5.2 Užití partikulárního řešení v hraniční formulaci	24
5.3 Úloha s harmonickou pravou stranou	25
6 Závěr	27

Seznam obrázků

4.1	Elementy sítě.	17
5.1	Použité sítě.	20
5.2	Zjemňování elementu.	20
5.3	Řešení úloh pro krychli.	22
5.4	Řešení úloh pro dutou kouli.	23
5.5	Konvergence chyb při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.	24
5.6	Konvergence chyb při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.	25
5.7	Konvergence chyb u úlohy s harmonickou pravou stranou.	26

Seznam tabulek

5.1	Chyby aproximace pro krychli při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.	21
5.2	Chyby aproximace pro dutou kouli při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.	21
5.3	Chyby aproximace pro krychli při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.	24
5.4	Chyby aproximace pro dutou kouli při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.	25
5.5	Chyby aproximace pro krychli u úlohy s harmonickou pravou stranou.	26
5.6	Chyby aproximace pro dutou kouli u úlohy s harmonickou pravou stranou.	26

1 Úvod

Metoda hraničních prvků (BEM – boundary element method) je v poslední době stále populárnější způsob řešení parciálních diferenciálních rovnic a představuje alternativu k běžně používané metodě konečných prvků (FEM – finite element method), metodě sítí (FDM – finite difference method), nebo metodě konečných objemů (FVM – finite volume method). Hlavní výhodou představuje schopnost vyjádřit okrajový problém pomocí hraničních integrálních rovnic a tím snížit dimenzi problému. Znamená to tedy, že 3D problém se zredukuje na 2D hranici a 2D problém se zredukuje na řešení integrální rovnice na 1D hranici oblasti. Tento přístup tedy umožňuje zabývat se diskretizací pouze hranice dané oblasti, na rozdíl od metody konečných prvků, kde musíme diskretizovat celou oblast. Zároveň metoda hraničních prvků umožňuje řešit typy úloh, pro které jsou tradiční metody jako FEM nevýhodné, a těmi jsou např. vnější úlohy. Pomocí metody BEM jsme totiž často schopni převést rovnice popisující řešení na neomezené oblasti na integrální rovnici přes omezenou hranici. Nevýhoda oproti metodě FEM je ta, že matice soustavy lineárních rovnic je ve většině případů hustá, tedy obsahující převážně nenulové prvky, zatímco matice metody FEM jsou řídké. Toto ale nemusí být nutně problém, neboť velikost matice metody hraničních prvků je menší. Počítáme totiž pouze hodnoty na hranici dané oblasti, a ty samy o sobě mohou představovat všechna potřebná data, třeba při řešení úloh tvarové optimalizace.

Na začátku této práce nejprve představíme 3D okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici, kterou se budeme zabývat, a některé její náležitosti. Dále si představíme potenciály, což jsou speciální funkce nezbytné pro řešení našeho problému pomocí BEM. Z vět o limitním přechodu zjistíme, jak se potenciály chovají po limitním přechodu $\Omega \ni \tilde{x} \rightarrow x \in \partial\Omega$ na hranici oblasti. Tato znalost pro nás bude klíčová, neboť potenciály figurují ve větě o třech potenciálech, která je jádrem metody BEM. Popisuje totiž, jak vypadá řešení úlohy vyjádřené pomocí hraničních hodnot a jejími úpravami získáme hraniční integrální rovnice, ve kterých bude figurovat tzv. Newtonův potenciál. Pomocí třech různých přístupů si ukážeme, jak lze Newtonův potenciál ve zvláštních případech realizovat efektivně. Následně se podíváme na diskretizaci jednotlivých přístupů a v poslední kapitole na numerické experimenty.

2 Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici ve 3D

2.1 Zavedení okrajové úlohy, fundamentální řešení

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná omezená oblast, tedy otevřená souvislá množina, s dostatečně hladkou hranicí a $f \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{okrajové podmínky} & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde symbolem Δ rozumíme Laplaceův operátor ve 3D, neboli

$$\Delta u(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Okrajové podmínky mohou být zadány ve tvaru

- Dirichletovy okrajové podmínky: $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, kde g je funkce spojitá na $\partial\Omega$,
- Neumannovy okrajové podmínky: $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, kde h je funkce spojitá na $\partial\Omega$ a \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$,
- Smíšené okrajové podmínky: na neprázdné množině $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ máme zadanou Dirichletovu okrajovou podmínku a na neprázdné množině $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ máme zadanou Neumannovu okrajovou podmínku, přičemž platí, že $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

Pokud řešíme úlohu s nulovou pravou stranou, tedy $f(\mathbf{x}) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$, nazýváme danou rovnici *Laplaceovou*.

Pro další postup potřebujeme zavést tzv. harmonické funkce.

Definice 2.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická, jestliže platí

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega.$$

Uvažujme funkci $u^*: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \quad (2.1)$$

Symbolem $\|\cdot\|$ rozumíme euklidovskou normu, tj.

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Můžeme si všimnout, že pro funkci u^* platí

$$u^* \in C^\infty\left((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}\right).$$

V bodech $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ je funkce u^* singulární. Necht \mathbf{x} je libovolně zvolený bod z \mathbb{R}^3 . Pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}\}$ spočítejme první a druhé parciální derivace funkce u^* vzhledem k proměnné y_i , $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{-1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot \frac{1}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot 2(x_i - y_i) \cdot (-1) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(x_i - y_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}, \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial y_i^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} - \frac{1}{4\pi} \cdot (x_i - y_i) \cdot \frac{(-3)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^4} \cdot \frac{1}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot 2(x_i - y_i) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} + \frac{3}{4\pi} \frac{(x_i - y_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^5}.\end{aligned}$$

Potom

$$\Delta_{\mathbf{y}} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y_i^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} - 3 \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^5} \right) = 0.$$

Pro každé pevně zvolené $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ je funkce $\mathbf{y} \mapsto u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ harmonická v $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}\}$.

Definice 2.2. Funkci $u^*: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem (2.1) nazveme fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice v \mathbb{R}^3 .

Pro další výpočty budeme také využívat normálové derivace fundamentálního řešení

$$\frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}.$$

Znalost fundamentálního řešení a jeho normálové derivace je nezbytná pro formulaci Poissonovy úlohy pomocí hraniční integrální rovnice, což nás čeká v další sekci. Nejdříve si ale zavedeme speciální zobrazení zvané *potenciály*.

2.2 Potenciály v \mathbb{R}^3 a jejich vlastnosti

Než se budeme zabývat potenciály a jejich vlastnostmi, seznámíme se s první a druhou Greenovou větou [2, 3] a jádrem metody hraničních prvků, tedy větou o třech potenciálech.

Věta 2.3 (První Greenova věta). *Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Pak pro $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a $v \in C^1(\overline{\Omega})$ platí*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, ds - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Poznámka 2.4. Protože funkce u a v z předchozí věty nemusí být definované v $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, budeme normálovou derivací v předchozí větě rozumět

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0_+} \left(\nabla u(\mathbf{x} - h\mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right) \text{ pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Jednoduchým důsledkem první Greenovy věty je následující věta.

Důsledek 2.5 (Druhá Greenova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Pak pro $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ platí*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\Delta v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s} - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}.$$

Věta 2.6 (O třech potenciálech). *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí, u^* je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v prostoru, tj.*

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \text{ pro } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

$u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega$ platí:

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = - \int_{\Omega} u^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} u^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}. \quad (2.2)$$

Vztah (2.2) nazýváme *reprezentační věta*. Integrály objevující se v předchozí větě, které si nyní více přiblížíme, se nazývají potenciály.

Definice 2.7. Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí. Zobrazení \tilde{V}, W, \tilde{N} , které funkcím μ, σ, ρ přiřadí funkce

$$\begin{aligned} (\tilde{V}\mu)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \mu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\ (W\sigma)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \sigma(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\ (\tilde{N}\rho)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \rho(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

se postupně nazývají operátor potenciálu jednoduché vrstvy, operátor potenciálu dvojvrstvy a operátor Newtonova potenciálu. Funkcím $\tilde{V}\mu, W\sigma, \tilde{N}\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme postupně potenciál jednoduché vrstvy, potenciál dvojvrstvy, Newtonův potenciál a funkcím $\mu, \sigma, \rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme hustoty příslušných potenciálů.

Díky zavedení označení jsme nyní schopni přepsat repozentační větu (2.2) jako

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = -(\tilde{N}\Delta u)(\tilde{\mathbf{x}}) + \left(\tilde{V} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (2.3)$$

Vzorec (2.3) je možno vyhodnotit pouze v objemu. Abychom získali obdobný vztah platný na hranici, je třeba se podívat, jaké vlastnosti mají potenciály při limitním přechodu na hranici [2,3].

Věta 2.8 (O vlastnostech potenciálu jednoduché vrstvy). *Bud' $\Omega \in \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\mu \in C(\partial\Omega)$. Pak potenciál $\tilde{V}\mu$ je spojitý v \mathbb{R}^3 a pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí*

$$\lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} (\tilde{V}\mu)(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \mu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} =: (V\mu)(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Zobrazení V nazýváme *operátorem jednoduché vrstvy*.

Věta 2.9 (O vlastnostech potenciálu dvojvrstvy). *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak restrikce potenciálu $W\sigma$ na $\partial\Omega$ je spojitá funkce a pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí*

$$\lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} (W\sigma)(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \sigma(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} =: -\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x}) + (K\sigma)(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Zobrazení K nazýváme operátorem dvojvrstvy.

Věta 2.10 (O vlastnostech Newtonova potenciálu). *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\rho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál $\tilde{N}\rho$ je spojitý a pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí*

$$\lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} (\tilde{N}\rho)(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \rho(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} =: (N\rho)(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Zobrazení N nazýváme Newtonovým operátorem.

2.3 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí a $f \in C(\partial\Omega)$. V dalším textu se omezíme na Dirichletovu okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Reprezentační větu pro úlohu (2.7) lze zapsat následovně

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{V}t)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wg)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad (2.8)$$

kde $t := \frac{\partial u}{\partial n}$ jsou zatím neznámá Neumannova data. Využijeme-li vlastností operátorů z vět (2.4), (2.5) a (2.6), po limitním přechodu $\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \partial\Omega$ odvodíme z reprezentační věty (2.8) vztah

$$u(\mathbf{x}) = (Vt)(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) - (Kg)(\mathbf{x}) + (Nf)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

neboli

$$(Vt)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) + (Kg)(\mathbf{x}) - (Nf)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.9)$$

Zde nastává problém s vyčíslením Newtonova operátoru N , neboť bychom museli při jeho vyhodnocování pracovat s objemovým integrálem, což je nepraktické. Pro jeho výpočet existují ve zvláštních případech efektivnější metody, ke kterým se dostaneme pomocí několika různých přístupů popsaných v kapitole 3.

3 Realizace Newtonova potenciálu pomocí hraničních operátorů

Připomeňme, že hledáme řešení úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Pro řešení Poissonovy rovnice v této práci použijeme tři různé přístupy. U prvních dvou využijeme znalost tzv. partikulárního řešení u_p a u třetího vlastnost, že funkce f je harmonická, tedy splňuje podmínku $-\Delta f = 0$ v Ω .

3.1 Užití partikulárního řešení v objemové formulaci

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí, $f \in C(\Omega)$, u_p je partikulární řešení Poissonovy úlohy, neboli

$$-\Delta u_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega$$

a hledejme řešení úlohy (3.1) ve tvaru

$$u = u_0 + u_p.$$

Dosadíme-li za u do úlohy (3.1), dostaneme

$$\begin{cases} -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_0(\mathbf{x}) = g - u_p & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Pro normálovou derivaci řešení platí

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{n}}.$$

Pro přehlednost zavedme značení

$$t := \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \quad t_0 := \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}, \quad t_p := \frac{\partial u_p}{\partial \mathbf{n}}.$$

Reprezentační věta pro u_0 řešící (3.2) vypadá po dosazení do (2.2) následovně

$$u_0(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_{\partial\Omega} u^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) t_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (3.3)$$

Všimněme si, že jsme se zbavili vyčíslení Newtonova potenciálu $\tilde{N}f$, neboť pravá strana naší modifikované úlohy (3.2) je nulová a \tilde{N} je lineární zobrazení. Pro vyčíslení reprezentační věty (3.3) potřebujeme získat neznámou t_0 . Po limitním přechodu $\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \partial\Omega$ z vět (2.4) a (2.5) odvodíme hraniční integrální rovnici

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} u_0(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Nyní můžeme dosadit počáteční podmínky do hraniční integrální rovnice a získáme tak vztah

$$\int_{\partial\Omega} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_0(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} = \frac{1}{2}(g - u_p)(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(g - u_p)(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

který lze zapsat pomocí značení zavedeného ve větách (2.4) a (2.5) následovně

$$(Vt_0)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(g - u_p)(\mathbf{x}) + [K(g - u_p)](\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.4)$$

Po dosazení do reprezentační věty (3.3) získáme řešení původní úlohy jako $u = u_0 + u_p$.

3.2 Užítí partikulárního řešení v hraniční formulaci

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí, $f \in C(\Omega)$, u_p je partikulární řešení Poissonovy úlohy

$$-\Delta u_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega$$

a hledejme řešení úlohy (3.1) ve tvaru

$$u = u_0 + u_p.$$

Dosadíme stejně jako v předchozím přístupu za u do úlohy (3.1) a dostaneme

$$\begin{cases} -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_0(\mathbf{x}) = g - u_p & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Budeme také využívat stejné vlastnosti řešení a jeho normálové derivace jako v předchozím přístupu.

Reprezentační větu si pro tento přístup vyjádříme ze vztahů (2.8) a (3.3). Ze vztahu (3.3) odvodíme

$$u_0(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{V}t_0)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu_0)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \quad (3.5)$$

a ze vztahu (2.8) víme, že platí

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{V}t)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (3.6)$$

Protože $t_p = t - t_o$ a $u_p = u - u_o$, odečtením (3.6) a (3.5) získáme

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) - u_0(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{V}t)(\tilde{\mathbf{x}}) - (\tilde{V}t_0)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu)(\tilde{\mathbf{x}}) + (Wu_0)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega,$$

neboli

$$u_p(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{V}t_p)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu_p)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega.$$

Z výše uvedeného vztahu odvodíme

$$(\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) = u_p(\tilde{\mathbf{x}}) - (\tilde{V}t_p)(\tilde{\mathbf{x}}) + (Wu_p)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \quad (3.7)$$

a pokud vztah (3.7) dosadíme do vztahu (3.6), získáme tím reprezentační větu

$$\begin{aligned} u(\tilde{\mathbf{x}}) &= (\tilde{V}t)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu)(\tilde{\mathbf{x}}) + u_p(\tilde{\mathbf{x}}) - (\tilde{V}t_p)(\tilde{\mathbf{x}}) + (Wu_p)(\tilde{\mathbf{x}}) = \\ &= (\tilde{V}t_0)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wu_0)(\tilde{\mathbf{x}}) + u_p(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ze vztahu (3.8) získáme po limitním přechodu hraniční integrální rovnici

$$u(\mathbf{x}) = (Vt)(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) - (Ku)(\mathbf{x}) + u_p(\mathbf{x}) - (Vt_p)(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}u_p(\mathbf{x}) + (Ku_p)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

kterou upravíme následovně

$$(Vt)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u - u_p)(\mathbf{x}) + [K(u - u_p)](\mathbf{x}) + (Vt_p)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Porovnáme-li předchozí rovnici s (2.9), zjistíme, že pro Nf platí

$$(Nf)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}u_p(\mathbf{x}) + (Ku_p)(\mathbf{x}) - (Vt_p)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

3.3 Úloha s harmonickou pravou stranou

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí, $f \in C^2(\overline{\Omega})$ a platí

$$-\Delta f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Označme

$$u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Všimněme si, že pro pevně zvolené $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a všechna $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}\}$ platí

$$\Delta_{\mathbf{y}} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Opravdu, pro všechna $i \in \{1, 2, 3\}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{**}}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot 2(x_i - y_i) = -\frac{1}{8\pi} \frac{x_i - y_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, \\ \frac{\partial^2 u^{**}}{\partial y_i^2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{8\pi} \left(-\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + (x_i - y_i) \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (x_i - y_i) \right) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{(x_i - y_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right). \end{aligned}$$

Nakonec sečteme přes i

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{y}} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{(x_i - y_i)^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{3}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Protože navíc $\Delta f = 0$, získáme

$$(\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_{\Omega} u^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{y}} u^{**}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\Omega} u^{**}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \Delta f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega.$$

Z druhé Greenovy věty získáme postupem podobným jako při důkazu reprezentační věty [3, 5]

$$(\tilde{N}f)(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega.$$

Následně upravíme reprezentační větu (2.2)

$$\begin{aligned} u(\tilde{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} t(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^3} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podobně jako v kapitole o potenciálech zavedme označení

$$\begin{aligned} (\tilde{V}_B\mu)(\tilde{\mathbf{x}}) &:= \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \mu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}}, \\ (\tilde{K}_B\sigma)(\tilde{\mathbf{x}}) &:= -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} \sigma(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

pro všechna $\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega$. S tímto značením jsme schopni přepsat vztah (3.9) následovně

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{V}t)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wg)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{K}_Bf)(\tilde{\mathbf{x}}) - \left(\tilde{V}_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \quad (3.10)$$

Pokud chceme získat hraniční integrální rovnici, potřebujeme vědět, jak se funkce $\tilde{V}_B\mu$ a $\tilde{K}_B\sigma$ chovají po limitním přechodu na hranici.

Věta 3.1. *Bud' $\Omega \in \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\mu \in C(\partial\Omega)$. Pak funkce $\tilde{V}_B\mu$ je spojitá v \mathbb{R}^3 a pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí*

$$\lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} (\tilde{V}_B\mu)(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} =: (V_B\mu)(\mathbf{x}). \quad (3.11)$$

Věta 3.2. *Bud' $\Omega \in \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $\sigma \in C(\partial\Omega)$. Pak funkce $\tilde{K}_B\sigma$ je spojitá v \mathbb{R}^3 a pro každé $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ platí*

$$\lim_{\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} (\tilde{K}_B\sigma)(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \sigma(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} =: (K_B\sigma)(\mathbf{x}). \quad (3.12)$$

Ze vztahu (3.10) a z vět o limitním přechodu (2.4), (2.5), (3.11) a (3.12) odvodíme hraniční integrální rovnici

$$g(\mathbf{x}) = (Vt)(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) - (Kg)(\mathbf{x}) + (K_Bf)(\mathbf{x}) - \left(V_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

kterou upravíme následovně

$$(Vt)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) + (Kg)(\mathbf{x}) - (K_Bf)(\mathbf{x}) + \left(V_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

4 Diskretizace a metoda hraničních prvků

V předchozí kapitole jsme si představili způsoby, kterými lze ve speciálních případech efektivně realizovat vyčíslení Newtonova potenciálu Nf . Problém spočívá v tom, že hraniční integrální rovnice nelze řešit analyticky. V této kapitole si tedy ukážeme, jak lze řešit každý z přístupů diskrétně. V dalším textu se omezíme na polygonální oblasti, které budeme diskretizovat triangulací, tedy

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^E \overline{\tau_k}, \quad (4.1)$$

kde τ_k jsou rovinné trojúhelníky.

Pro další výpočty je vhodné si zavést parametr sítě h definován vztahem

$$h := \max_k \sqrt{\Delta_{\tau_k}}, \quad (4.2)$$

kde Δ_{τ_k} je obsah elementu τ_k .

Dále budeme potřebovat speciální funkce, které nazveme *funkce po částech konstantní* a *funkce po částech lineární*.

Definice 4.1. Pro každý element τ_k definujeme funkci $\psi_k: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\psi_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{pro } \mathbf{x} \in \tau_k, \\ 0 & \text{pro } \mathbf{x} \notin \tau_k. \end{cases}$$

Funkci

$$t_h: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t_h := \sum_{k=1}^E t_k \psi_k$$

s libovolnými koeficienty t_k nazveme *po částech konstantní*. Všimněme si, že funkci t_h lze ztotožnit s vektorem $\mathbf{t} := [t_1, \dots, t_E]$.

Dostatečně hladkou funkci $t: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lze aproximovat lineární kombinací po částech konstantních funkcí několika způsoby. Jedním z nich je tzv. interpolace

$$t_k := t(\mathbf{x}^{k*}),$$

kde \mathbf{x}^{k*} je těžiště elementu τ_k . Tento způsob však nemusí být vždy nejvhodnější. Proto si zavedeme tzv. $L^2(\partial\Omega)$ projekci

$$t_h := \arg \min_{\psi \text{ je po částech konstantní}} \frac{1}{2} \|\psi - t\|_{L^2(\partial\Omega)}^2,$$

kde norma

$$\|\psi - t\|_{L^2(\partial\Omega)} := \sqrt{\int_{\partial\Omega} (\psi(\mathbf{x}) - t(\mathbf{x}))^2 \, ds}$$

je indukovaná $L^2(\partial\Omega)$ skalárním součinem

$$(m, n)_{L^2(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} m(\mathbf{x})n(\mathbf{x}) \, ds.$$

Platí tedy

$$(m, m)_{L^2(\partial\Omega)} = \|m\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Abychom našli koeficienty t_k aproximující t , zavedeme si pomocnou funkci $p: \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\begin{aligned} p(t_1, \dots, t_E) &:= \frac{1}{2} \left\| t - \sum_{k=1}^E t_k \psi_k \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \left(t - \sum_{k=1}^E t_k \psi_k, t - \sum_{k=1}^E t_k \psi_k \right)_{L^2(\partial\Omega)} = \\ &= \frac{1}{2} (t, t)_{L^2(\partial\Omega)} - \sum_{k=1}^E t_k (t, \psi_k)_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^E t_k \sum_{\ell=1}^E t_\ell (\psi_k, \psi_\ell)_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Co se týče parciálních derivací funkce p , získáme

$$\frac{\partial p}{\partial t_j} = -(t, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)} + \sum_{k=1}^E t_k (\psi_k, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Navíc platí, že Hessián funkce p vypadá následovně

$$H_p[j, i] = \frac{\partial^2 p}{\partial t_j \partial t_i} = (\psi_i, \psi_j).$$

Dá se ukázat, že tento Hessián je pozitivně definitní matice. Pokud tedy chceme najít minimum funkce p , položíme $\frac{\partial p}{\partial t_j} = 0$ a získáme systém lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^E t_k (\psi_k, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)} = (t, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)} \quad \text{pro } j \in \{1, \dots, E\} \quad (4.3)$$

s řešením v podobě vektoru $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_E]^\top \in \mathbb{R}^E$. Systém (4.3) můžeme zapsat jako

$$\overline{\mathbf{M}}_h \mathbf{t} = \mathbf{p}, \quad (4.4)$$

kde

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_h[j, k] &:= (\psi_k, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \psi_k(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \Delta_{\tau_k} & \text{pro } k = j, \\ 0 & \text{pro } k \neq j, \end{cases} \\ p_j &:= (t, \psi_j)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} t(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \int_{\tau_j} t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Protože je matice $\overline{\mathbf{M}}_h$ diagonální, koeficienty t_k získáme jednoduše jako

$$t_k = \frac{1}{\Delta_{\tau_k}} \int_{\tau_k} t(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}.$$

Po částech konstantní aproximaci budeme využívat k diskretizaci Neumannových dat, neboli normálových derivací na hranici.

Definice 4.2. Pro každý uzel \mathbf{x}^i definujeme spojitou funkci $\varphi_i: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\varphi_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{v uzlu } \mathbf{x}^i, \\ 0 & \text{v uzlu } \mathbf{x}^j, i \neq j, \\ \text{lineární} & \text{jinde.} \end{cases}$$

Funkci

$$g_h: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_h := \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i,$$

kde N je počet uzlů trojúhelníkové sítě, nazveme *po částech lineární* a lze ji ztotožnit s vektorem $\mathbf{g} := [g_1, \dots, g_N]$.

Podobně jako u *po částech konstantních* funkcí lze dostatečně hladkou funkci g aproximovat lineární kombinací *po částech lineárních* funkcí několika způsoby. Můžeme opět použít interpolaci

$$g_i := g(\mathbf{x}^i).$$

Pro naše účely budeme opět preferovat $L^2(\partial\Omega)$ projekci

$$g_h := \arg \min_{\varphi \text{ je po částech lineární}} \frac{1}{2} \|\varphi - g\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Koeficienty funkcí lze najít stejným způsobem jako u *po částech konstantních* funkcí, a to jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^N g_i (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\partial\Omega)} = (g, \varphi_j)_{L^2(\partial\Omega)} \quad \text{pro } j \in \{1, \dots, N\},$$

kterou lze přepsat následovně

$$\overline{\mathbf{M}}_h \mathbf{g} = \mathbf{q} \tag{4.5}$$

a kde platí

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_h[j, i] &:= \int_{\partial\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}, \\ q_j &:= \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Po *částech lineární* aproximaci budeme využívat k diskretizaci Dirichletových dat, neboli hodnot řešení na hranici.

4.1 Diskretizace užití partikulárního řešení v objemové formulaci

V prvním přístupu jsme získali hraniční integrální rovnici

$$(Vt_0)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(g - u_p)(\mathbf{x}) + [K(g - u_p)](\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Neznámá Neumannova data t_0 zadána spojitě lze aproximovat pomocí po částech konstantních funkcí, tedy t_0 budeme hledat ve tvaru

$$t_0 \approx t_{0,h} := \sum_{k=1}^E t_{0,k} \psi_k.$$

Funkci $t_{0,h}$ lze ztotožnit s vektorem $\mathbf{t}_0 = [t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,E}]$. Jednotlivé složky $t_{0,k}$ vektoru \mathbf{t}_0 představují hodnoty funkce $t_{0,h}$ na k -tém elementu dané sítě. Dále potřebujeme aproximovat známé spojitě funkce g a u_p $L^2(\partial\Omega)$ projekcí (4.5),

$$g \approx g_h := \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i, \quad u_p \approx u_{p,h} := \sum_{i=1}^N u_{p,i} \varphi_i.$$

Funkce g_h a $u_{p,h}$ lze ztotožnit s vektory $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_N]$ a $\mathbf{u}_p = [u_{p,1}, u_{p,2}, \dots, u_{p,N}]$. Jednotlivé složky vektorů představují hodnoty funkcí g_h a $u_{p,h}$ v příslušném uzlu.

Po aproximaci můžeme za t_0 dosadit $t_{0,h}$, za g dosadit g_h a za u_p dosadit $u_{p,h}$. Tím získáme ze (3.4) následující rovnici

$$(Vt_{0,h})(\mathbf{x}) = \left[\left(\frac{1}{2}I + K \right) (g_h - u_{p,h}) \right](\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

kde I je identické zobrazení. Nyní si musíme uvědomit, že máme E neznámých, ale nekonečně mnoho rovnic. Abychom získali E rovnic, přenásobíme uvedený vztah E funkcemi ψ_ℓ po částech konstantními a znovu zintegrujeme přes hranici oblasti. Výsledný vztah vypadá následovně

$$\int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) (Vt_{0,h})(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left[\left(\frac{1}{2}I + K \right) (g_h - u_{p,h}) \right](\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Pro další postup potřebujeme aproximovat zobrazení V, K a I . Co se týče zobrazení V , využijeme zde jeho linearitu a linearitu integrálu. Pro levou stranu rovnice (4.6) platí

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) (Vt_{0,h})(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(V \sum_{k=1}^E t_{0,k} \psi_k \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^E t_{0,k} V \psi_k \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \\ &= \sum_{k=1}^E t_{0,k} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \psi_k(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde E je počet elementů dané sítě a

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \psi_k(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \int_{\tau_\ell} \int_{\tau_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} =: V_h[\ell, k].$$

Dále budeme pracovat pouze se členy pravé strany rovnice (4.6) obsahující zobrazení K ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} K(g_h - u_{p,h})(\mathbf{x}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (g_h - u_{p,h})(\mathbf{x}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \\ &= \sum_{i=1}^N (g_i - u_{p,i}) \int_{\tau_\ell} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde N je počet uzlů dané sítě a

$$\int_{\tau_\ell} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} \, d\mathbf{s}_\mathbf{x} =: K_h[\ell, i].$$

Nakonec budeme pracovat pouze se členy pravé strany rovnice (4.6) obsahující zobrazení I ,

$$\int_{\partial\Omega} \left[I(g_h - u_{p,h}) \right](\mathbf{x}) \psi_\ell(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N (g_i - u_{p,i}) \int_{\tau_\ell} \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s},$$

kde

$$\int_{\tau_\ell} \varphi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s} =: M_h[\ell, i].$$

Nyní máme k dispozici vektory \mathbf{g} , \mathbf{u}_p a \mathbf{t}_0 spolu s maticemi V_h , K_h a M_h , a tedy můžeme vyřešit hraniční integrální rovnici v diskrétním tvaru

$$V_h \mathbf{t}_0 = \left(\frac{1}{2} M_h + K_h \right) (\mathbf{g} - \mathbf{u}_p).$$

Řešení úlohy (3.2) lze aproximovat pomocí diskrétní reprezentační věty, která vypadá po dosazení aproximovaných veličin do vztahu (3.3) následovně

$$\begin{aligned} u_0(\tilde{\mathbf{x}}) \approx u_{0,h}(\tilde{\mathbf{x}}) &:= \int_{\partial\Omega} u^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) t_{0,h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) u_{0,h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} = \\ &= \sum_{k=1}^E t_{0,k} \int_{\tau_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} - \sum_{i=1}^N u_{0,i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pokud označíme $u_{0,h} := u_h - u_{p,h}$, získáme úpravou vztahu (4.7) diskrétní reprezentační větu pro tento přístup aproximující řešení úlohy (3.1)

$$\begin{aligned} u(\tilde{\mathbf{x}}) \approx u_h(\tilde{\mathbf{x}}) &:= \sum_{k=1}^E t_{0,k} \int_{\tau_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} - \sum_{i=1}^N u_{0,i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) \, d\mathbf{s}_\mathbf{y} + \\ &+ \sum_{i=1}^N u_{p,i} \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Diskretizace užití partikulárního řešení v hraniční formulaci

V druhém přístupu řešíme hraniční integrální rovnici

$$(Vt)(\mathbf{x}) = \left[\left(\frac{1}{2} I + K \right) (g - u_p) \right](\mathbf{x}) + Vt_p(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Funkce g a u_p spolu se zobrazeními V , K a I aproximujeme stejně jako v předchozím přístupu. Navíc si potřebujeme aproximovat funkce t a t_p . Nejprve začneme s funkcí t ,

$$t \approx t_h := \sum_{k=1}^E t_k \psi_k,$$

kde E je počet elementů dané sítě. Funkci t_h lze ztotožnit s vektorem $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_E]$. Co se týče funkce t_p , aproximujeme ji obdobně

$$t_p \approx t_{p,h} := \sum_{k=1}^E t_{p,k} \psi_k$$

a funkci $t_{p,h}$ reprezentujeme vektorem $\mathbf{t}_p = [t_{p,1}, t_{p,2}, \dots, t_{p,E}]$. Po těchto aproximacích máme k dispozici vektory \mathbf{g} , \mathbf{u}_p , \mathbf{t} a \mathbf{t}_p spolu s maticemi \mathbf{V}_h , \mathbf{K}_h a \mathbf{M}_h , a tedy můžeme vyřešit hraniční integrální rovnici v diskretním tvaru

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) (\mathbf{g} - \mathbf{u}_p) + \mathbf{V}_h \mathbf{t}_p.$$

Označíme $t_{0,h} := t_h - t_{p,h}$ a aproximujeme řešení úlohy (3.1) pomocí diskretní reprezentační věty, která pro tento přístup vypadá po úpravě vztahu (3.8) následovně

$$\begin{aligned} u(\tilde{\mathbf{x}}) \approx u_h(\tilde{\mathbf{x}}) &:= (\tilde{V} t_{0,h})(\tilde{\mathbf{x}}) - (W u_{0,h})(\tilde{\mathbf{x}}) + u_{p,h}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^E t_{0,k} \int_{\tau_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \\ &- \sum_{i=1}^N u_{0,i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^N u_{p,i} \varphi_i(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3 Diskretizace úlohy s harmonickou pravou stranou

Ve třetím přístupu řešíme hraniční integrální rovnici

$$(Vt)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) + (Kg)(\mathbf{x}) + (K_B f)(\mathbf{x}) + \left(V_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Z předchozích přístupů víme, jak aproximovat funkce t a g , společně se zobrazeními V a K . Potřebujeme tedy navíc aproximovat funkce f a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$, a poté zobrazení V_B a K_B . Co se týče funkce f , aproximujeme ji po částech lineárně

$$f \approx f_h := \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i,$$

kde N je počet uzlů dané sítě. Funkci f_h lze reprezentovat pomocí vektoru $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]$ a aproximujeme ji pomocí $L^2(\partial\Omega)$ projekce (4.5). Dále potřebujeme aproximovat funkci $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ po částech konstantně

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \approx s_h := \sum_{k=1}^E s_k \psi_k,$$

kde E je počet elementů dané sítě. Funkci s_h reprezentujeme vektorem $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_E]$. V tomto případě použijeme pro aproximaci $L^2(\partial\Omega)$ projekci (4.4).

Nyní je třeba aproximovat zobrazení V_B , K_B . Využijeme tedy stejného postupu jako v předchozích přístupech, tedy přenásobíme hraniční integrální rovnici E funkcemi po částech konstantními, zintegrujeme a pro všechna $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x})(Vt)(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \frac{1}{2}g(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x})(Kg)(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x})(K_B f)(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(V_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Jako první aproximujeme zobrazení V_B následovně

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(V_B \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(V_B \sum_{k=1}^E s_k \psi_k \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^E s_k V_B \psi_k \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \\ &= \sum_{k=1}^E s_k \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{8\pi} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \psi_k(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde E je rovno počtu elementů dané sítě a platí

$$\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{8\pi} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \psi_k(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \frac{1}{8\pi} \int_{\tau_\ell} \int_{\tau_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} =: V_{B,h}[l, k].$$

Nyní aproximujeme zobrazení K_B jako

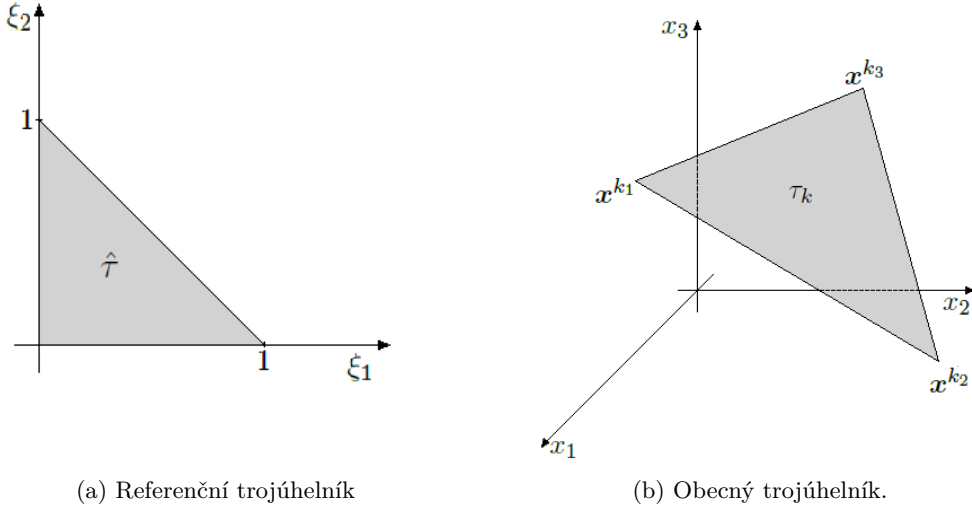
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x})(K_B f)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(K_B \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi_\ell(\mathbf{x}) \left(\sum_{i=1}^N f_i K_B \varphi_i \right)(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{x} = \\ &= - \sum_{i=1}^N f_i \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{8\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \varphi_i(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde N je rovno počtu uzlů dané sítě a platí

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{8\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \varphi_i(\mathbf{y}) \psi_\ell(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} &= \\ &= - \frac{1}{8\pi} \int_{\tau_\ell} \int_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_\mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \varphi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_\mathbf{y} d\mathbf{s}_\mathbf{x} =: K_{B,h}[l, i]. \end{aligned}$$

Nyní máme k dispozici vektory \mathbf{g} , \mathbf{t} , \mathbf{f} a \mathbf{s} spolu s maticemi V_h , K_h , $V_{B,h}$, $K_{B,h}$ a M_h , a můžeme tedy vyřešit hraniční integrální rovnici v diskrétním tvaru

$$V_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} M_h + K_h \right) \mathbf{g} + K_{B,h} \mathbf{f} + V_{B,h} \mathbf{s}.$$



Obrázek 4.1: Elementy sítě.

Řešení úlohy (3.1) lze aproximovat pomocí diskrétní reprezentační věty, která pro tento přístup vypadá po úpravě vztahu (3.10) následovně

$$\begin{aligned}
 u(\tilde{\mathbf{x}}) &\approx u_h(\tilde{\mathbf{x}}) = (\tilde{V}t_h)(\tilde{\mathbf{x}}) - (Wg_h)(\tilde{\mathbf{x}}) + (\tilde{K}_B f_h)(\tilde{\mathbf{x}}) - (\tilde{V}_B s_h)(\tilde{\mathbf{x}}) = \\
 &= \sum_{k=1}^E t_k \int_{\tau_k} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \sum_{i=1}^N g_i \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^3} \varphi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \\
 &- \sum_{i=1}^N f_i \int_{\partial\Omega} \frac{1}{8\pi} \frac{(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|} \varphi_i(\mathbf{y}) d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} - \sum_{k=1}^E s_k \int_{\tau_k} \frac{1}{8\pi} \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| d\mathbf{s}_{\mathbf{y}} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.4 Numerická integrace

V následující podkapitole budeme uvažovat diskretizaci hranice oblasti (4.1). Pro každý element τ existuje parametrizace

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi}) := \mathbf{x}^1 + \mathbf{R}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}^1 + (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)\xi_1 + (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)\xi_2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \hat{\tau},$$

kde $\hat{\tau}$ je tzv. referenční trojúhelník (viz Obrázek 4.1a)

$$\hat{\tau} := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1\}.$$

Pro libovolnou integrovatelnou funkci o definovanou na τ platí

$$\int_{\tau} o(\mathbf{x}) d\mathbf{s}_{\mathbf{x}} = \int_{\hat{\tau}} o(\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi})) \|(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \times (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)\| d\mathbf{s}_{\boldsymbol{\xi}} = 2\Delta_{\tau} \int_{\hat{\tau}} \hat{o}(\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{s}_{\boldsymbol{\xi}},$$

kde $\hat{o}(\boldsymbol{\xi}) := o(\mathcal{R}(\boldsymbol{\xi}))$ a Δ_τ značí obsah trojúhelníku τ , neboli

$$\Delta_\tau = \int_{\tau} 1 \, d\mathbf{s}.$$

Integraci poté můžeme aproximovat následovně

$$\int_{\hat{\tau}} \hat{o}(\boldsymbol{\xi}) \, d\mathbf{s} \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \omega_k \hat{o}(\boldsymbol{\xi}^k)$$

s vhodnými parametry ω_k a $\boldsymbol{\xi}^k \in \hat{\tau}$ pro $k \in \{1, \dots, M\}$. Kvadrturní body $\boldsymbol{\xi}^k$ a příslušné váhy ω_k jsou definovány např. v [2].

Protože v metodě hraničních prvků integrujeme singulární funkce, musíme použít složitější postupy [3], které jsou naimplementovány v knihovně BEM4I [1].

5 Numerické experimenty

V této kapitole budeme řešit naši úlohu s konkrétními daty pomocí metody hraničních prvků popsané v předchozích kapitolách. Dirichletova a Neumannova data aproximujeme funkcemi po částech lineárními a funkcemi po částech konstantními. Metodu budeme testovat na sítích vzniklých triangulací krychle a duté koule.

Řešme následující úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

kde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &:= x_1 + x_2 + x_3, \\ g(\mathbf{x}) &:= (1 + x_1)e^{(2\pi x_2)} \cos(2\pi x_3) - \frac{1}{18}(x_1 + x_2 + x_3)^3. \end{aligned}$$

Zřejmě platí, že pro $u_p(\mathbf{x}) := -\frac{1}{18}(x_1 + x_2 + x_3)^3$ dostaneme $-\Delta u_p(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 = f(\mathbf{x})$. Funkce u_p je tedy partikulárním řešením naší úlohy.

Při výpočtech nás budou u všech přístupů zajímat chyby aproximace

$$e_t(h) := \frac{\|t_h - t\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|t\|_{L^2(\partial\Omega)}} := \left(\int_{\partial\Omega} (t_h(\tilde{\mathbf{x}}) - t(\tilde{\mathbf{x}}))^2 \, d\mathbf{s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\partial\Omega} t^2(\tilde{\mathbf{x}}) \, d\mathbf{s} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.2)$$

$$e_u(h) := |u_h(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})|, \quad (5.3)$$

kde t_h je aproximace Neumannových dat, t jsou přesná Neumannova data, u_h je aproximace řešení úlohy získaná vztahy (4.8), (4.9), (4.10) a u je přesné řešení úlohy. Bod

$$\Omega \ni \tilde{\mathbf{x}} = [0.250685, 0.417808, 0.584932]$$

zvolíme jako referenční a budeme jej používat ve všech přístupech stejný.

Během počítání pro nás bude klíčové zjemňování sítě. Při každém zjemnění sítě se nám každý element (trojúhelník) rozdělí na několik menších elementů stejné velikosti. V této práci budeme za jedno zjemnění uvažovat rozdělení jednoho elementu na čtyři menší elementy (viz Obrazek 5.2). Parametr sítě h (4.2) se tedy bude měnit následovně

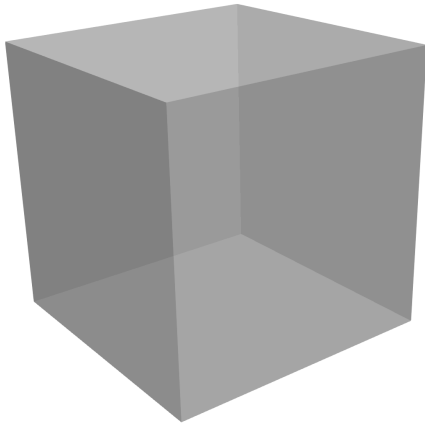
$$h_{r+1} = \frac{1}{2}h_r.$$

Při výpočtech nás budou zajímat odhady řádu konvergence *eoc* (estimated order of convergence). Dá se ukázat, že platí [4]

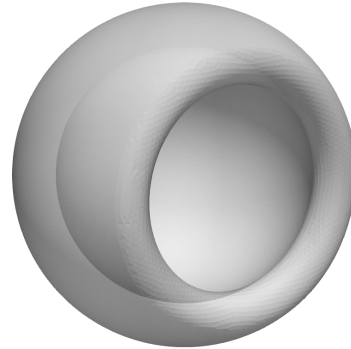
$$\begin{aligned} \|t_h - t\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq c(t)h^1, \\ |u_h(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})| &\leq c(u)h^3, \end{aligned} \quad (5.4)$$

kde exponent u parametru sítě h nazveme řádem konvergence. Ze vztahu (5.4) odvodíme, že

$$\begin{aligned} |u_{h_r}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})| &\leq c(u)h_r^3, \\ |u_{h_{r+1}}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})| &\leq c(u)h_{r+1}^3. \end{aligned}$$



(a) Krychle.



(b) Dutá koule

Obrázek 5.1: Použité sítě.

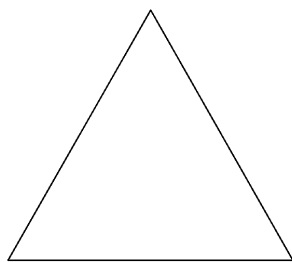
Pro podíl výše uvedených vztahů tedy platí

$$\frac{|u_{h_r}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})|}{|u_{h_{r+1}}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})|} \leq \left(\frac{h_r}{h_{r+1}} \right)^3 = 2^3$$

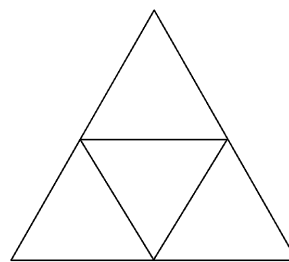
a po zlogaritmování obdržíme

$$\log_2 \frac{|u_{h_r}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})|}{|u_{h_{r+1}}(\tilde{\mathbf{x}}) - u(\tilde{\mathbf{x}})|} = \log_2 2^3 = 3 =: eoc_u.$$

Odhad řádu konvergence tedy získáme tak, že chybu spočítanou na určité síti podělíme chybou spočítanou na síti, která je o řád jemnější, a na výsledek aplikujeme dvojkový logaritmus.



(a) Element před zjemněním.



(b) Element po zjemnění

Obrázek 5.2: Zjemňování elementu.

5.1 Užití partikulárního řešení v objemové formulaci

Řešme úlohu (5.1) s daty zadanými v předchozí sekci. Dosadíme-li za $u = u_0 + u_p$ do úlohy (5.1), dostaneme

$$\begin{cases} -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_0(\mathbf{x}) = g - u_p & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Připomeňme, že řešíme hraniční integrální rovnici v diskrétním tvaru

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t}_0 = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) (\mathbf{g} - \mathbf{u}_p).$$

Řešení úlohy (5.1) pro tento přístup získáme z diskrétní reprezentační věty (4.8). V tabulce (5.1) nalezneme hledané hodnoty pro postupně se zmenšující parametr sítě krychle. Parametr E zde označuje počet elementů dané sítě, e_t je chyba Neumannových dat (5.2), eoc_t , eoc_u jsou odhady řádu konvergence a e_u je absolutní chyba řešení úlohy (5.3). Řešení úlohy (5.1) pro krychli je znázorněno na obrázku (5.3). Konvergence chyb e_t a e_u pro krychli jsou znázorněny na obrázku (5.5).

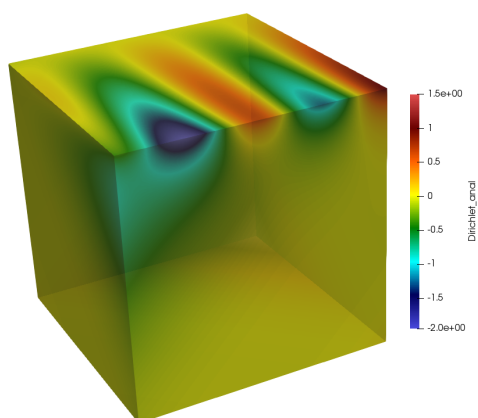
E	e_t	eoc_t	e_u	eoc_u
12	9.81e-01	—	8.54e-02	—
48	9.53e-01	0.04	3.78e-02	1.18
192	9.29e-01	0.04	4.78e-03	2.98
768	5.60e-01	0.73	6.52e-04	2.87
3072	2.42e-01	1.21	5.91e-05	3.47
12288	1.07e-01	1.18	6.06e-06	3.28
49152	4.89e-02	1.13	5.73e-07	3.41

Tabulka 5.1: Chyby aproximace pro krychli při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.

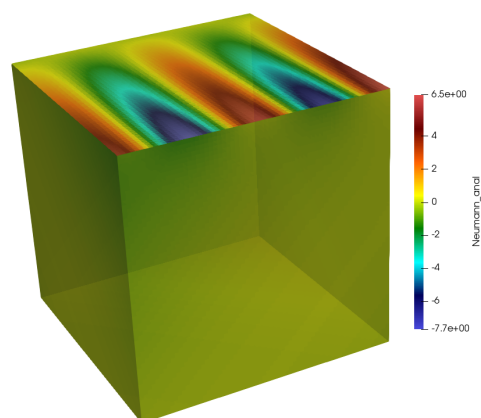
Pro dutou kouli jsme použili pouze jednu diskretizaci se 44412 elementy, a tedy nepočítáme řády konvergence eoc . Výsledky pro kouli jsou uvedeny v tabulce (5.2). Řešení úlohy (5.1) pro dutou kouli je znázorněno na obrázku (5.4).

E	e_t	e_u
44412	3.53e-02	1.04e-06

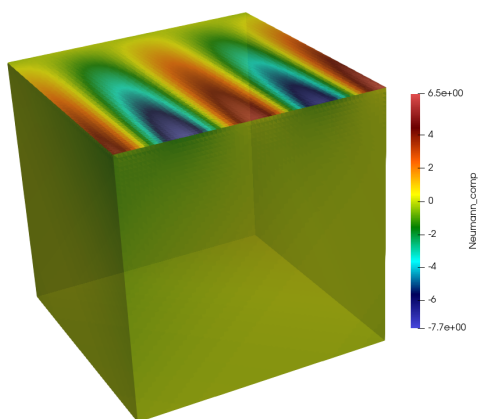
Tabulka 5.2: Chyby aproximace pro dutou kouli při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.



(a) Přesná Dirichletova data.

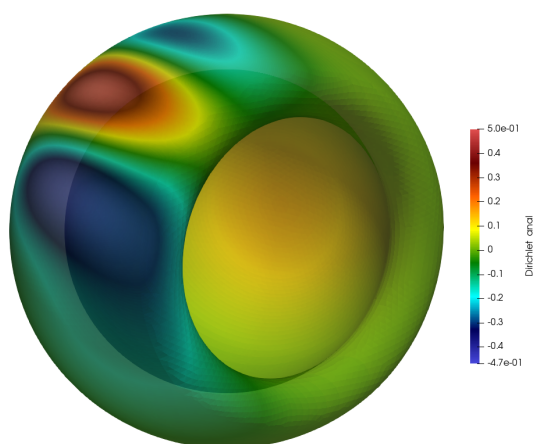


(b) Přesná Neumannova data.

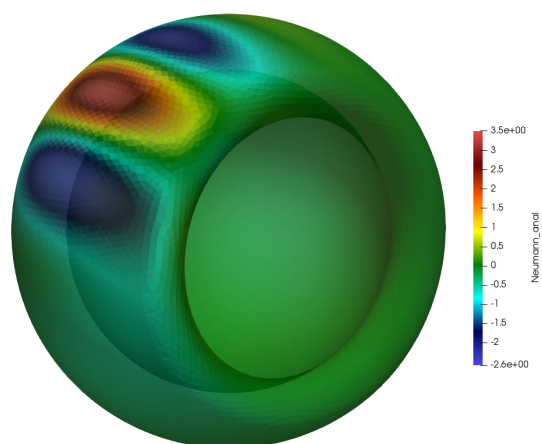


(c) Spočítaná Neumannova data t .

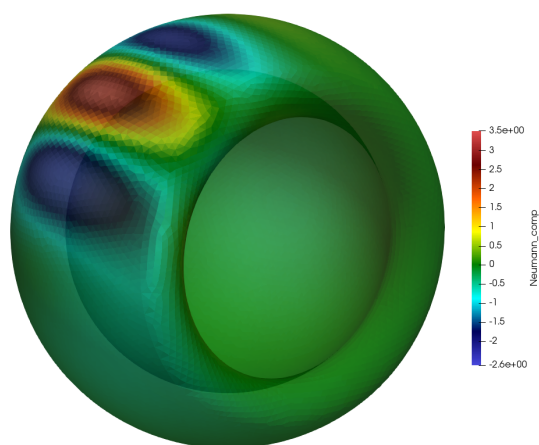
Obrázek 5.3: Řešení úloh pro krychli.



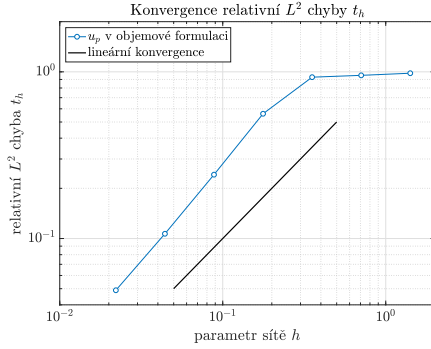
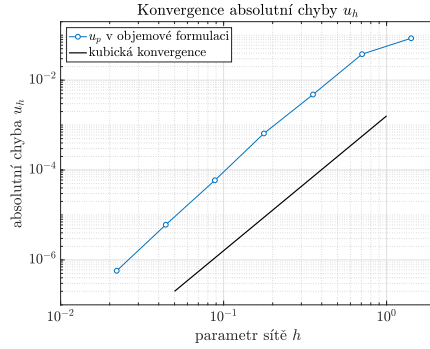
(a) Přesná Dirichletova data.



(b) Přesná Neumannova data.

(c) Spočítaná Neumannova data t .

Obrázek 5.4: Řešení úloh pro dutou kouli.

(a) Konvergence relativní L^2 chyby t_h .(b) Konvergence absolutní chyby u_h .

Obrázek 5.5: Konvergence chyb při užití partikulárního řešení v objemové formulaci.

5.2 Užití partikulárního řešení v hraniční formulaci

Řešme úlohu (5.1) s daty zadanými v úvodní sekci a s $t_p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3)^2(n_1 + n_2 + n_3)$. Dosadíme-li za $u = u_0 + u_p$ do úlohy (5.1), dostaneme

$$\begin{cases} -\Delta u_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u_0(\mathbf{x}) = g - u_p & \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Připomeňme, že řešíme hraniční integrální rovnici v diskrétním tvaru

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) (\mathbf{g} - \mathbf{u}_p) + \mathbf{V}_h \mathbf{t}_p.$$

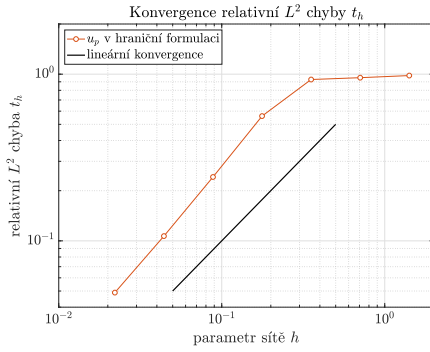
Řešení úlohy (5.1) pro tento přístup získáme z diskrétní reprezentační věty (4.9). Hledané hodnoty pro krychli a dutou kouli nalezneme v tabulkách (5.3) a (5.4). Konvergence chyb e_t a e_u pro krychli jsou znázorněny na obrázku (5.6).

E	e_t	EOC_t	e_u	EOC_u
12	9.81e-01	—	8.54e-02	—
48	9.53e-01	0.04	3.78e-02	1.18
192	9.29e-01	0.04	4.78e-03	2.98
768	5.60e-01	0.73	6.52e-04	2.87
3072	2.42e-01	1.21	5.91e-05	3.47
12288	1.07e-01	1.18	6.06e-06	3.28
49152	4.89e-02	1.13	5.73e-07	3.41

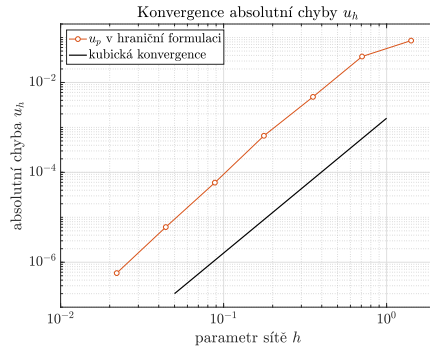
Tabulka 5.3: Chyby aproximace pro krychli při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.

E	e_t	e_u
44412	3.53e-02	1.04e-06

Tabulka 5.4: Chyby aproximace pro dutou kouli při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.



(a) Konvergence relativní L^2 chyby t_h .



(b) Konvergence absolutní chyby u_h .

Obrázek 5.6: Konvergence chyb při užití partikulárního řešení v hraniční formulaci.

5.3 Úloha s harmonickou pravou stranou

Všimněme si, že pro zadanou funkci f platí

$$-\Delta f = 0,$$

$$s := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = n_1 + n_2 + n_3$$

a můžeme tedy použít i třetí přístup.

Připomeňme, že řešíme hraniční integrální rovnici v diskrétním tvaru

$$\mathbf{V}_h \mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{M}_h + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{g} + \mathbf{K}_{B,h} \mathbf{f} + \mathbf{V}_{B,h} \mathbf{s}.$$

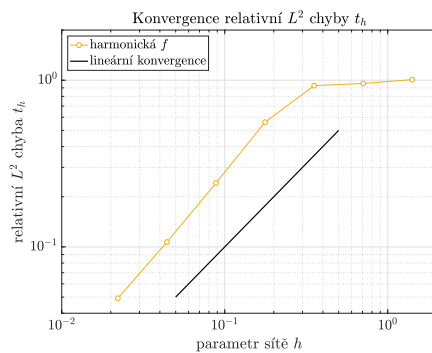
Řešení úlohy (5.1) pro tento přístup získáme z diskrétní reprezentační věty (4.10). Hledané hodnoty pro krychli a dutou kouli nalezneme v tabulkách (5.5) a (5.6). Konvergence chyb e_t a e_u pro krychli jsou znázorněny na obrázku (5.7).

E	e_t	eoc_t	e_u	eoc_u
12	1.01e+00	—	7.54e-02	—
48	9.56e-01	0.07	3.35e-02	1.17
192	9.28e-01	0.04	4.15e-03	2.99
768	5.60e-01	0.73	6.15e-04	2.74
3072	2.42e-01	1.21	5.41e-05	3.51
12288	1.07e-01	1.18	4.91e-06	3.46
49152	4.92e-02	1.13	1.64e-07	4.94

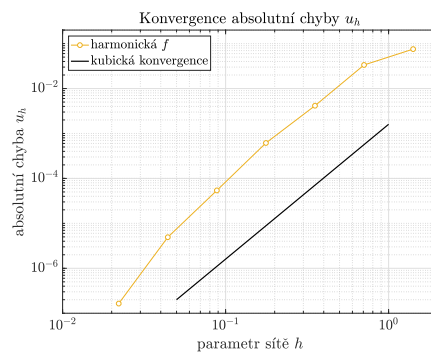
Tabulka 5.5: Chyby aproximace pro krychli u úlohy s harmonickou pravou stranou.

E	e_t	e_u
44412	3.53e-02	1.23e-06

Tabulka 5.6: Chyby aproximace pro dutou kouli u úlohy s harmonickou pravou stranou.



(a) Konvergence relativní L^2 chyby t_h .



(b) Konvergence absolutní chyby u_h .

Obrázek 5.7: Konvergence chyb u úlohy s harmonickou pravou stranou.

6 Závěr

V práci jsme se zabývali metodou hraničních prvků, což je jeden z přístupů, jak řešit parciální diferenciální rovnice. Nejdříve jsme si ukázali, jak lze převést problém z 3D oblasti na 2D hranici pomocí potenciálů, a tedy snížit dimenzi problému. Postupně jsme popsali tři různé přístupy, kterými lze realizovat Newtonův potenciál, a zbavit se tak nutnosti počítat objemové integrály. Pro každý přístup jsme získali příslušnou hraniční integrální rovnici, kterou jsme následně diskretizovali na trojúhelníkové síti. Nakonec jsme v kapitole o numerických experimentech získali výsledky pro dvě různé sítě.

V numerických experimentech jsme u všech přístupů získali podle očekávání podobné hodnoty, přičemž sledované odhady řádu konvergence se chovaly o trochu lépe, než jsme očekávali. Z tabulek je patrné, že námi spočítané řešení se jen málo liší od skutečného a tato chyba klesá řádově pro každé zjemnění sítě. Pro Neumannova data sice chyba klesá pomaleji, ale také lze z tabulek a obrázků řešení vidět, že námi spočítaná Neumannova data jsou velmi přesná a blíží se k těm skutečným. Je třeba říct, že pokud známe partikulární řešení, tak nemá smysl používat třetí přístup, neboť v něm vytváříme o dvě matice navíc, než v prvních dvou. Vytváření těchto matic se projeví zvýšenou časovou náročností. Může však nastat situace, kdy partikulární řešení neznáme, ale víme, že funkce na pravé straně je harmonická. Pak nám nezbývá než použít třetí přístup.

Postupy uvedené v této práci byly implementovány v knihovně BEM4I, do které jsme přidali realizaci vytvoření matic V_B a K_B společně s realizací reprezentační věty pro třetí přístup.

Literatura

- [1] MERTA, M., AND ZAPLETAL, J. *BEM4I*. IT4Innovations National Supercomputing Center, VŠB – Technical University of Ostrava, Studentská 6231/1B, 708 33 Ostrava-Poruba, Czech Republic, 2013. 18
- [2] RJASANOW, S., AND STEINBACH, O. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, 2007. 3, 4, 18
- [3] SAUTER, S. A., AND SCHWAB, C. *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010. 3, 4, 9, 18
- [4] STEINBACH, O. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements*. Texts in applied mathematics. Springer, New York, 2008. 19
- [5] ZAPLETAL, J. The boundary element method for the Helmholtz equation in 3D. Master's thesis, VŠB-TU Ostrava, 2011. 9